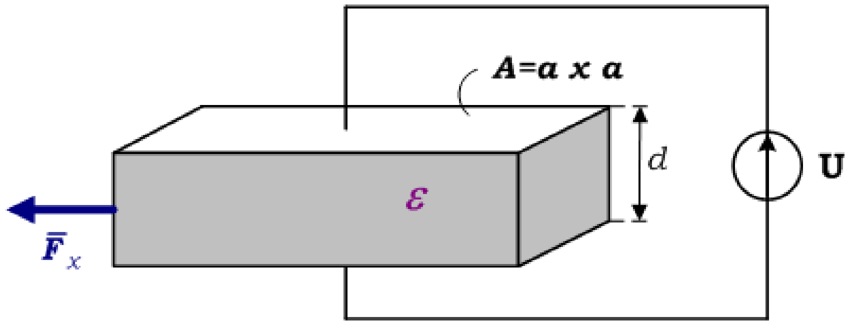
~ CURS 9 ~

6. Energia electromagnetică și forțele exercitate în câmp electromagnetic asupra corpurilor

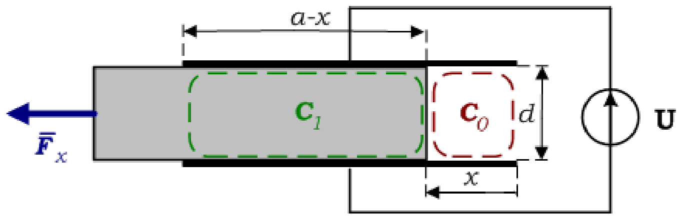
6.6. Aplicații ale teoremelor forțelor generalizate în câmp electric

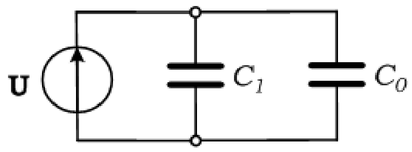
P1. Determinați forța ce acționează asupra dielectricului unui condensator plan, pentru a-l scoate dintre armături.



Rezolvare:

Redesenăm condensatorul, considerând că forța $\overline{\mathbf{F}}_x$ a acționat, scoțând dielectricul pentru o porțiune *x* dintre armăturile condensatorului (*x* este coordonata generalizată):





Se observă, așadar, că se formează un sistem de două condensatoare omogene, conectate la aceeași tensiune (deci, în paralel). Cu ajutorul formulei generale de calcul al capacității condensatorului plan putem determina valorile celor două capacități și a capacității echivalente cu ajutorul relației de conectare în paralel:

$$\left\{\begin{aligned} C_1 &= \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 a\cdot(a-x)}{d} \\ C_0 &= \frac{\varepsilon_0 a\cdot x}{d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_{ech}(x) = C_0 + C_1 = \frac{\varepsilon_0 ax(1-\varepsilon_r)}{d} + \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 a^2}{d}$$

Cunoscând valoarea capacității electrice, se poate calcula energia electrică înmagazinată între armăturile condensatorului:

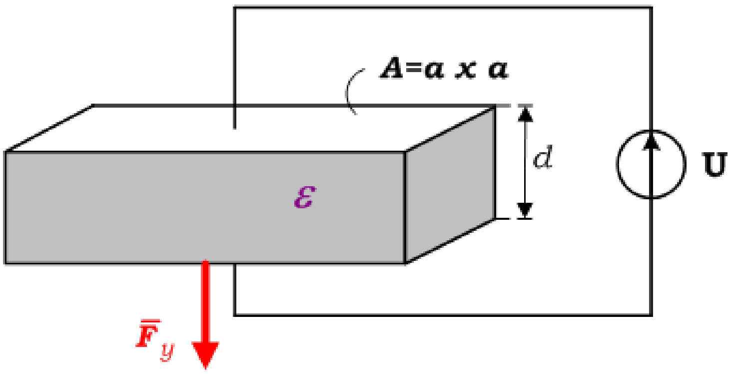
$$W_e = \frac{1}{2} C_{ech}(x) \cdot U^2 = \frac{U^2}{2d}\left[\varepsilon_0 ax(1-\varepsilon_r) + \varepsilon_r \varepsilon_0 a^2\right]$$

Forța ce acționează asupra dielectricului se calculează astfel:

$$F_x = \left.\frac{\partial W_e}{\partial x}\right|_{U=ct.} = \frac{U^2}{2d}\varepsilon_0 a(1-\varepsilon_r) < 0$$

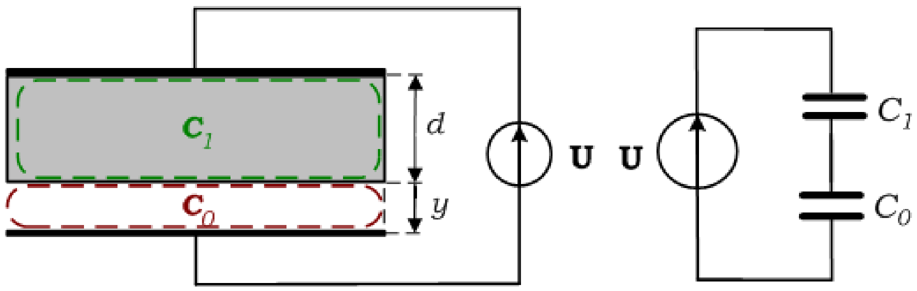
<u>OBS</u>: Faptul că valoarea forței este negativă se explică prin faptul că la alimentarea condensatorului cu tensiunea *U*, asupra dielectricului acționează o forță orizontală ce tinde a-l menține între armăturile condensatorului (de sens opusei celei calculate).

<u>P2</u>. Determinați forța ce acționează asupra armăturii unui condensator plan, pentru a o dezlipi de dielectricul său.



Rezolvare:

Redesenăm condensatorul, considerând că forța $\overline{\mathbf{F}}_y$ a acționat, desprinzând armătura pentru o distanță *y* de dielectricul condensatorului (*y* este coordonata generalizată):



Se observă, așadar, că se formează un sistem de două condensatoare omogene, conectate în serie. Cu ajutorul formulei generale de calcul al capacității condensatorului plan, putem determina valorile celor două capacități și a capacității echivalente cu ajutorul relației de conectare în serie:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\varepsilon_r \varepsilon_0 a^2}{d} \\ C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 a^2}{y} \end{cases} \Rightarrow C_{ech}(y) = \frac{C_0 \cdot C_1}{C_0 + C_1} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 a^2}{d + \varepsilon_r y}$$

Cunoscând valoarea capacității electrice, se poate calcula energia electrică înmagazinată între armăturile condensatorului:

$$W_e = \frac{1}{2}C_{ech}(y)\cdot U^2 = \frac{U^2}{2}\cdot\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 a^2}{d+\varepsilon_r y}$$

Forța ce acționează asupra dielectricului se calculează astfel:

$$F_y = \left.\frac{\partial W_e}{\partial y}\right|_{U=ct.} = -\frac{U^2\varepsilon_r^2\varepsilon_0 a^2}{2(d+\varepsilon_r y)^2} < 0$$

<u>OBS</u>: Faptul că valoarea forței este negativă se explică prin faptul că la alimentarea condensatorului cu tensiunea *U*, asupra dielectricului acționează o forță verticală ce tinde a-l menține între armăturile condensatorului (de sens opusei celei calculate).

6.7. Circuite magnetice

Un circuit magnetic este un dispozitiv ce conține porțiuni de materiale magnetice cu permeabilitate ridicată împreună cu eventuale întreruperi transversale ale acestora numite întrefieruri (ocupate de regulă de aer sau alte materiale nemagnetice) și de surse de câmp magnetic, reprezentate de bobine parcurse de curenți și de magneți permanenți.

Așa cum rezultă din teorema refracției liniilor de câmp magnetic, datorită permeabilităților lor magnetice de valori mult mai ridicate decât cea a mediului nemagnetic înconjurător, elementele (laturile) circuitului magnetic au calitatea de a conduce aproape integral liniile câmpului magnetic, comportându-se practic ca niște tuburi de flux magnetic. De aceea, într-o primă aproximație curent folosită, în calculul circuitelor magnetice se adoptă următoarele două ipoteze simplificatoare:

- se consideră fluxul magnetic același în diferite secțiuni ale unei laturi de circuit neramificate, neglijând astfel fenomenul de dispersie magnetică, adică de închidere transversală (prin aer) a unora dintre liniile de flux;
- fluxul magnetic se presupune uniform repartizat pe orice secțiune transversală normală a unei laturi de circuit, inducția magnetică fiind aceeași în toate punctele secțiunii: $\Phi = B\cdot A$, unde *A* este aria secțiunii considerate.

<u>A. Relații de bază în calculul circuitelor magnetice</u>

Pentru calculul circuitelor magnetice (în regim staționar și cvasistaționar) se folosesc o serie de relații sistematice.

a. Prima teoremă a lui Kirchhoff

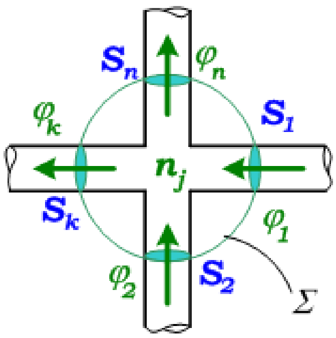


Fig. 6.5. Nod de circuit magnetic.

Aplicând legea fluxului magnetic pe o suprafață închisă Σ_j, în jurul unui nod n_j unde sunt concurente mai multe laturi ale unui circuit magnetic (fig. 6.5) rezultă:

$$\varphi_{\Sigma_j} = \oint_{\Sigma} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = 0$$

Deoarece inducția magnetică $\overline{\mathbf{B}}$ este practic nulă în afara laturilor circuitului magnetic, integrala pe suprafața închisă este egală cu o sumă de integrale pe suprafețele S_k:

$$\varphi_{\Sigma_j} = \oint_{\Sigma_j} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = \sum_{l_k \in N_j} \int_{S_l} \overline{\mathbf{B}} \cdot \overline{\mathbf{n}} \cdot dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{l_k \in N_j} \varphi_k = 0$$

***Enunț*: Suma algebrică a fluxurilor magnetice din laturile incidente la un nod al unui circuit magnetic este nulă.**

<u>OBS</u>: Prima teoremă Kirchhoff pentru circuite magnetice este similară primei teoreme Kirchhoff pentru circuite electrice, fluxul prin latura de circuit magnetic fiind similar cu intensitatea curentului în curent continuu.

b. A doua teoremă a lui Kirchhoff

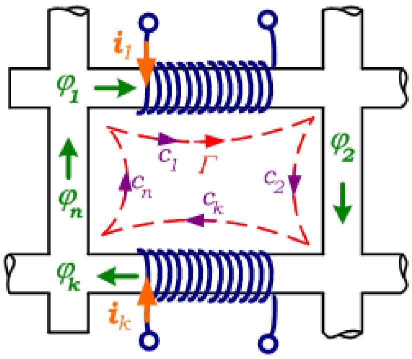


Fig. 6.6. Bucla de circuit magnetic.

Se aplică teorema lui Ampère pe o curbă închisă Γ_h formată din săgețile tensiunilor magnetice duse la bornele laturilor unui circuit magnetic, curbă (buclă B_h) care să nu intersecteze spirele unor eventuale bobine plasate pe laturile respective (fig. 6.6) rezultând:

$$u_{mm\Gamma_h} = \oint_{\Gamma_h} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = i_{S_{\Gamma_h}} = 0$$

Deoarece curba nu înlănțuie nicio spiră, curentul total prin orice suprafață care se sprijină pe aceasta este nul, iar integrala pe curba închisă se transformă într-o sumă de integrale pe curbele deschise C_k:

$$u_{mm\Gamma_h} = \oint_{\Gamma_h} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \sum_{l_k \in B_h} \int_{C_k} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{l_k \in B_h} u_{mm_k} = 0$$

***Enunț*: Suma algebrică a tensiunilor magnetice la bornele laturilor aparținând unei bucle dintr-un circuit magnetic este egală cu zero.**

<u>OBS</u>: A doua teoremă Kirchhoff pentru circuite magnetice este similară teoremei a doua a lui Kirchhoff pentru circuite electrice, tensiunea magnetică la bornele unei laturi de circuit magnetic fiind similară cu tensiunea electrică la bornele unei laturi de circuit electric.

c. Legea lui Ohm pentru circuite magnetice

Pentru o latură *k* a unui circuit magnetic aplicăm teorema lui Ampère pe o curbă închisă Γ_k care trece prin interiorul laturii, înlănţuie cele N_k spire ale bobinei de pe acea latură şi se închide prin exterior între bornele laturii (fig. 8.3):

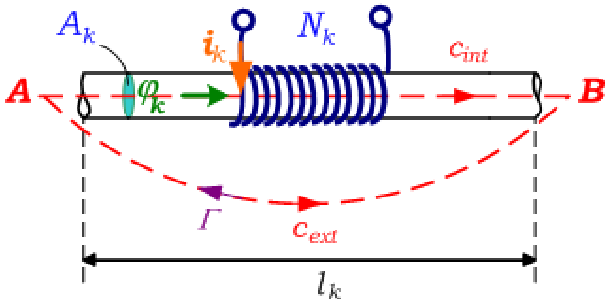


Fig. 8.3. Latura de circuit magnetic.

$$u_{mm\Gamma_h} = \oint_{\Gamma_h} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = i_{S_{\Gamma_h}} = N_k i_k$$

Mărimea $\Theta_k = N_k i_k$ poartă denumirea de *solenaţie* şi are semnificaţia unei tensiuni magnetomotoare de-a lungul curbei Γ_k.

Integrala pe curba închisă este egală cu suma integralelor pe curbele interioară şi exterioară:

$$\int_{AB(C_{int})} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} + \int_{BA(C_{ext})} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{AB(C_{int})} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} - \int_{AB(C_{ext})} \overline{\mathbf{H}} \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \Theta_k$$

unde primul termen din membrul stâng se numeşte tensiune în lungul laturii, u_{mlk}, iar al doilea se numeşte tensiune la bornele laturii, u_{mk}.

Pentru circuite magnetice din materiale liniare (practic neutilizate), dar cu bună aproximaţie şi pentru circuite magnetice din materiale feromagnetice moi (foarte mult folosite) utilizate în zona de liniaritate a caracteristicii de magnetizare, tensiunea magnetică în lungul laturii are expresia (în care se ţine cont şi de faptul că fluxul magnetic este acelaşi de-a lungul laturii):

$$u_{mlk} = \int_{C_{kint}} \overline{\mathbf{H}}_k \cdot \overline{\mathbf{dl}} = \int_{C_{kint}} H_k dl = \int_{C_{kint}} \frac{B_k}{\mu_k} dl = \int_{C_{kint}} \frac{\varphi_k}{\mu_k A_k} dl = \varphi_k \int_{C_{kint}} \frac{dl}{\mu_k A_k}$$

în care:

$$R_k = \frac{u_{mlk}}{\varphi_k} = \int_{C_{kint}} \frac{dl}{\mu_k A_k}$$

mărime egală, prin definiţie, cu raportul dintre tensiunea magnetică şi fluxul magnetic, şi care se numeşte *reluctanţă* sau *rezistenţă magnetică* şi se măsoară în amperi pe weber $[\mathrm{A/Wb}]$ sau henry la puterea minus unu $[\mathrm{H}^{-1}]$.

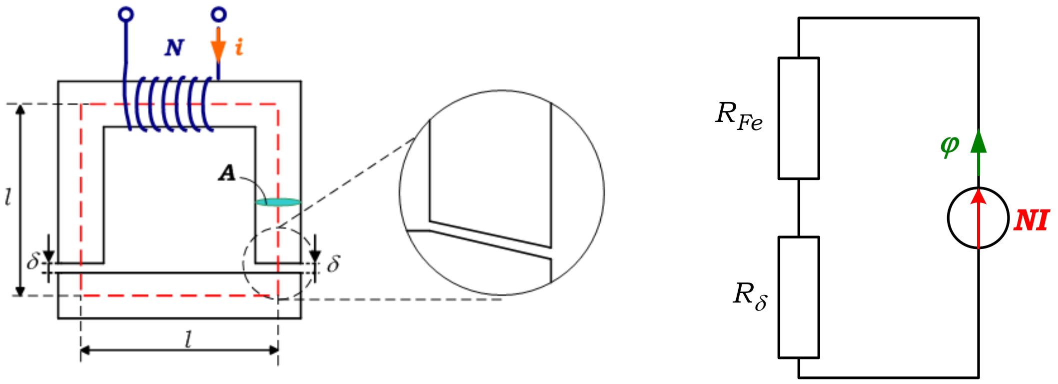
Putem sintetiza aşadar următoarele echivalenţe între circuitele electrice de curent continuu şi circuitele magnetice:

Circuite electrice	Circuite magnetice
i	φ
u	u_{m}
R	R_{m}
e	$\Theta_k = N_k i_k$

6.8. Aplicaţii ale teoremelor forţelor generalizate în câmp magnetic

P3. Să se calculeze forţa care se exercită asupra armăturii mobile a unui electromagnet (având armătura fixă în formă de *U* şi cea mobilă în formă de *I*), când bobina acestuia absoarbe un curent de intensitate *i*.

Rezolvare:



Coordonata generalizată în raport cu care se va calcula această forţă este grosimea δ a întrefierului (în sensul creşterii acestui întrefier). De aceea, tot calculul trebuie să păstreze această mărime în raport cu care se va face derivata parţială a energiei magnetice.

Reluctanţa echivalentă a întregului circuit este:

$$R_m(\delta) = R_{Fe} + R_\delta = \frac{l_{Fe}}{\mu_r \mu_0 A} + \frac{2\delta}{\mu_0 A},$$

unde l_{Fe} este lungimea porţiunii de fier (adică $4l - 2\delta$).

Inductivitatea bobinei se exprimă cu relaţia:

$$L(\delta) = \frac{\Phi}{i} = \frac{N\varphi}{i} = \frac{N \cdot \frac{Ni}{R_m}}{i} = \frac{N^2}{R_m}$$

Calculul forţei se poate face în cele două ipoteze prezentate în cursul anterior:

a) *se consideră fluxul magnetic constant*

În acest caz, energia magnetică se exprimă cu relaţia:

$$W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Phi^2}{L(\delta)},$$

iar forţa se determină:

$$F = -\left.\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right|_{\Phi=ct.} = -\frac{1}{2}\Phi^2 \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{1}{L(\delta)}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2(\delta)}\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta} = \frac{i^2}{2}\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta}$$

b) *se consideră curentul electric constant*

În acest caz, energia magnetică se exprimă cu relația:

$$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}L(\delta)i^2,$$

iar forța se determină:

$$F = \left.\frac{\partial W_m}{\partial \delta}\right|_{i=ct.} = \frac{1}{2}i^2\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta}$$

OBS: Se observă că ambele ipoteze ne oferă același rezultat.

Așadar, calculul se reduce la derivarea inductivității în raport cu δ:

$$\frac{\partial L(\delta)}{\partial \delta} = \frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{N^2}{R_m}\right) = N^2\frac{\partial}{\partial \delta}\left(\frac{1}{R_m}\right) = -\frac{N^2}{R_m^2}\frac{\partial R_m}{\partial \delta} = -\frac{2N^2}{\mu_0 A R_m^2}$$

În aceste condiții forța de atracție (semnul negativ indică acest lucru) are valoarea:

$$F = -\frac{i^2N^2}{\mu_0 A R_m^2} = -\frac{i^2N^2}{\mu_0 A \cdot \dfrac{(l_{Fe} + 2\delta\mu_r)^2}{(\mu_r\mu_0 A)^2}} = -\frac{i^2N^2\mu_r^2\mu_0 A}{(l_{Fe} + 2\delta\mu_r)^2} < 0$$

OBS: Se observă așadar că această forță este direct proporțională cu aria secțiunii întrefierului, A, și invers proporțională cu grosimea acestuia, δ. De aceea, intensificarea forței de atracției se poate face prin micșorarea grosimii întrefierului, dar și prin mărirea ariei secțiunii, lucru posibil prin efectuarea unei tăieturi oblice (cum se poate observa în imaginea din dreapta circuitului).